**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΘΕΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(f'(x)-f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)\text{συν}x\,dx=-1$**

**και $f'(x)=-2xf^2(x)$ , για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

**Α. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$**

**Β. Να βρείτε τον τύπο της $f$.**

**Γ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\,f(x)\text{ημ}x)$ .**

**Δ. Αν $F$ είναι μια αρχική της $f$ , να αποδείξετε ότι**

**$\frac{1}{10}<F(3)-F(2)<\frac{1}{5}$**

**Ε. Αν $F(1)=0$ να υπολογίσετε το $\int_0^1 F(x)dx$.**

**ΣΤ. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό $\alpha$, ο οποίος έχει την ιδιότητα : $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha}(x+\ln x)f(x)dx=1$**

**ΛΥΣΗ**

**Α. Από την υπόθεση έχουμε :**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(f'(x) - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \sigma\upsilon\nu x \, dx = -1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\sigma\upsilon\nu x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sigma\upsilon\nu x \, dx = -1 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\sigma\upsilon\nu x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\eta\mu x \, dx = -1 \Leftrightarrow$$

$$[f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)(\sigma\upsilon\nu x)' \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\eta\mu x \, dx = -1 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} - f(0)\sigma\upsilon\nu 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\eta\mu x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\eta\mu x \, dx = -1 \Leftrightarrow$$

$-f(0) = -1 \Leftrightarrow \boxed{f(0) = 1}$ , **αφού για το ολοκλήρωμα**

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sigma\upsilon\nu x \, dx$ ,

**αντικαθιστώντας** $u = \frac{\pi}{2} - x$ , $du = -dx$ ,

$u_1 = \frac{\pi}{2}$ , $u_2 = 0$ , **έχουμε ότι:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \sigma\upsilon\nu x\, dx =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(u)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-u\right) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(u)\eta\mu u\, du =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\eta\mu x\, dx$$

**Β. Από την υπόθεση η f είναι συνεχής και**

$f(x) \neq 0$ **, για κάθε** $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = -2xf^2(x) \Leftrightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (x^2)'$$

$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + c$ **,** $c \in \mathbb{R}$ **λόγω του πορίσματος των συνεπειών του Θ.Μ.Τ.**

**Για** $x = 0$ **είναι** $\frac{1}{f(0)} = 0^2 + c \Leftrightarrow c = 1$

**Άρα** $\frac{1}{f(x)} = x^2 + 1 \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \frac{1}{x^2+1} \quad , x \in \mathbb{R}}$

**Γ.** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\, f(x)\eta\mu x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,\frac{1}{x^2+1}\,\eta\mu x\right) =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\,\eta\mu x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\,\frac{\eta\mu x}{x}\right) = 1\cdot 0 = 0$$

**Επειδή :**

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2} = 1$

- $\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \le \frac{1}{|x|}$ , **άρα :** $-\frac{1}{|x|} \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$

  $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|} = 0$ , **οπότε**

  **από κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι :** $\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

**Δ. Η F ως αρχική συνάρτηση της f στο ℝ, είναι παραγωγίσιμη στο ℝ , με $F'(x) = f(x)$, οπότε είναι και συνεχής στο ℝ. Επομένως η F ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [ 2 , 3 ]. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2,3)$ τέτοιο ώστε :** $F'(\xi) = \frac{F(3)-F(2)}{3-2} \Leftrightarrow f(\xi) = F(3) - F(2) \quad (1)$

**Θα μελετήσουμε την f ως προς την μονοτονία.**

**Η** $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ **είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο ℝ,**

**με** $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ , $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \Leftrightarrow -2x < 0 \Leftrightarrow x > 0$

**Αν** $x \in (-\infty, 0)$ *είναι* $f'(x) > 0$ **και η f είναι συνεχής στο** $(-\infty, 0]$**, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο** $(-\infty, 0]$**.**

**Αν** $x \in (0, +\infty)$ *είναι* $f'(x) < 0$ **και η f είναι συνεχής στο** $[0, +\infty)$**, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο** $[0, +\infty)$**.**

**Οπότε για** $\xi \in (2,3) \Leftrightarrow 2 < \xi < 3 \Leftrightarrow f(2) > f(\xi) > f(3) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(3) < F(3) - F(2) < f(2) \quad (\text{ λόγω της (1) })$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3^2+1} < F(3) - F(2) < \frac{1}{2^2+1} \Leftrightarrow \frac{1}{10} < F(3) - F(2) < \frac{1}{5}$$

**( 2ος τρόπος ) Λόγω του τύπου της συνάρτησης f που έχουμε στη συγκεκριμένη άσκηση , θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα :**

$$2 < \xi < 3 \Leftrightarrow 4 < \xi^2 < 9 \Leftrightarrow 5 < \xi^2 + 1 < 10 \Leftrightarrow \frac{1}{5} > \frac{1}{\xi^2+1} > \frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} < f(\xi) < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{1}{10} < F(3) - F(2) < \frac{1}{5} \quad (\text{ λόγω της (1) })$$

**Ε.** $$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 x'F(x)dx = [xF(x)]_0^1 - \int_0^1 x\,F'(x)dx =$$

$$= 1 \cdot F(1) - 0 \cdot F(0) - \int_0^1 x\,f(x)dx = -\int_0^1 x \cdot \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = -\frac{1}{2}\,[\ln|x^2+1|]_0^1 = -\frac{\ln 2}{2}$$

**ΣΤ.** $$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} (x + \ln x)f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} (x + \ln x)\frac{1}{x^2+1}\,dx = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{x}{x^2+1}\,dx + \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx = 1 \quad (2)$$

$$I_1 = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}[\ln(x^2+1)]_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(\alpha^2+1) - \ln(\frac{1}{\alpha^2}+1)\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha^2+1}{\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}} = \frac{1}{2}\ln\alpha^2 = \ln\alpha$$

$$\mathbf{I_2 = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx = \int_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\ln\frac{1}{u}}{\left(\frac{1}{u}\right)^2+1} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = -\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\ln u}{u^2+1}\, du = -I_2}$$

**Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\mathbf{I_2}$ θέσαμε :**

$$\boldsymbol{u = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{u} \quad , \quad dx = -\frac{1}{u^2}du \quad , \quad \mathrm{u}_1 = \alpha \quad , \quad u_2 = \frac{1}{\alpha}}$$

**άρα :** $\mathbf{I_2 = -I_2 \Leftrightarrow 2I_2 = 0 \Leftrightarrow I_2 = 0}$

**Από την ( 2 )** $\boldsymbol{\Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow a = e}$

**Επιμέλεια : ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΕΙΡΗΝΗ**